R

الترتيب و العمليات

تمرين 1

x و y عددان حقيقيان حيث: $x \leq y$

① قارن $3x-7y$ و $-5y+x$

② قارن $-\frac{2y+8x}{5}$ و $\frac{7x-11y}{2}$

تمرين 2

x و y و z و t و k أعداد حقيقية حيث:	$3 \leq x \leq 6$	$-7 \leq y \leq -4$	$2 \leq z \leq 5$	$-10 \leq t \leq 1$	$-9 \leq k \leq -2$

أطر التعابير الآتية :

$x+y$	$z+t$	$x-y$	$z-x$	$6t+2y$	$-y+5x$
$5x$	$-6y$	$10y$	$-4t$	$-4y-16$	$x+y-t+6z+13$
x^2	y^2	t^2	xz	xy	yk
$\frac{z}{x}$	$\frac{y}{z}$	$\frac{x-t}{y+10z}$	$\frac{y^2+5}{t-10}$		

تمرين 3

قارن كل عددين مما يلي :

$3\sqrt{5}$ و $\sqrt{37}$	$-2\sqrt{10}$ و $-\sqrt{3}$	$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$	$20\sqrt{2}$ و $-7\sqrt{14}$
$\sqrt{17}-\sqrt{11}$ و $\sqrt{5}-\sqrt{40}$		$6+\sqrt{5}$ و $6+\sqrt{3}$	$\sqrt{27}+1$ و $3+\sqrt{3}$

تمرين 4

إذا علمت أن : $\begin{cases} 1,41 < \sqrt{2} < 1,42 \\ 2,23 < \sqrt{5} < 2,24 \end{cases}$ فاعط تأطيرا للعددين : $A = 5\sqrt{2}+3\sqrt{5}$ و $B = \frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

R

الترتيب و العمليات - حلول

تمرين 1

انتبه ← تعليق ←

معطيات : x و y عددان حقيقيان حيث: $x \leq y$

① نقارن $3x-7y$ و $-5y+x$

لدينا :

$(-5y+x)-(3x-7y)=-5y+x-3x+7y$

$=-2x+2y=2(-x+y)=2(y-x)$

و بما أن $x \leq y$ فإن $x-y \leq 0$ منه $2(x-y) \leq 0$

بالتالي : $-5y+x \leq 3x-7y$

② نقارن $-\frac{2y+8x}{5}$ و $\frac{7x-11y}{2}$

لدينا :

$\frac{7x-11y}{2}+\frac{2y+8x}{5}=\frac{5(7x-11y)+2(2y+8x)}{10}$

$=\frac{35x-55y+4y+16x}{10}=\frac{51x-51y}{10}=\frac{51(x-y)}{10}$

و بما أن $x \leq y$ فإن $x-y \leq 0$ منه $\frac{51(x-y)}{2} \leq 0$

بالتالي : $\frac{7x-11y}{2} \leq -\frac{2y+8x}{5}$

تمرين 2

انتبه ← تعليق ←

معطيات	$3 \leq x \leq 6$	$-7 \leq y \leq -4$	$2 \leq z \leq 5$	$-10 \leq t \leq 1$	$-9 \leq k \leq -2$

نؤطر $x+y$

لدينا : $3 \leq x \leq 6$ و $-7 \leq y \leq -4$

إذن : $-7+3 \leq x+y \leq -4+6$

إذن : $-4 \leq x+y \leq 2$

نؤطر $z+t$

لدينا : $2 \leq z \leq 5$ و $-10 \leq t \leq 1$

إذن : $2+(-10) \leq z+t \leq 5+1$

إذن : $-8 \leq z+t \leq 6$

نؤطر $5x$

لدينا $3 \leq x \leq 6$ منه : $15 \leq 5x \leq 30$

نؤطر $-6y$

لدينا $-7 \leq y \leq -4$ منه : $24 \leq -6y \leq 42$

نؤطر $10y$

لدينا $-7 \leq y \leq -4$ منه : $-70 \leq 10y \leq -40$

نؤطر $-4t$

لدينا $-10 \leq t \leq 1$ منه : $-4 \leq -4t \leq 40$

← تذكر أنه عندما نضرب متفاوتة في عدد سالب فإننا نغير ترتيب الأطراف.

نؤطر $x-y$

لدينا : $x-y=x+(-y)$

و لدينا $-7 \leq y \leq -4$ منه : $4 \leq -y \leq 7$

و لدينا : $3 \leq x \leq 6$

إذن : $3+4 \leq x+(-y) \leq 6+7$

بالتالي : $7 \leq x-y \leq 13$

نؤطر $z-x$

لدينا : $z-x=z+(-x)$

و لدينا $3 \leq x \leq 6$ منه : $-6 \leq -x \leq -3$

و لدينا : $2 \leq z \leq 5$

إذن : $2+(-6) \leq z+(-x) \leq 5+(-3)$

بالتالي : $-4 \leq z-x \leq 2$

← لانستطيع التأطير مباشرة لأنه لاتوجد قاعدة تسمح بتأطير الفرق

نؤطر x^2

لدينا $3 \leq x \leq 6$ منه : $9 \leq x^2 \leq 36$

نؤطر y^2

لدينا $-7 \leq y \leq -4$ منه : $4 \leq -y \leq 7$

منه : $16 \leq (-y)^2 \leq 49$

بالتالي : $16 \leq y^2 \leq 49$

← لانستطيع تأطير y^2 مباشرة لأن المتفاوتة $-7 \leq y \leq -4$ تحتوي على أعداد سالبة، لذلك نؤطر $-y$ فنحصل على متفاوتة كل أطرافها موجبة، ثم نؤطر $(-y)^2$ ، ثم نستعمل الخاصية: $(-y)^2=y^2$

نؤطر $6t+2y$

لدينا $-10 \leq t \leq 1$ منه : $-60 \leq 6t \leq 6$

لدينا $-7 \leq y \leq -4$ منه : $-14 \leq 2y \leq -8$

إذن : $-60+(-14) \leq 6t+2y \leq 6+(-8)$

بالتالي : $-74 \leq 6t+2y \leq -2$

نؤطر $-y+5x$

لدينا $-7 \leq y \leq -4$ منه : $4 \leq -y \leq 7$

لدينا $3 \leq x \leq 6$ منه : $15 \leq 5x \leq 30$

إذن : $4+15 \leq -y+5x \leq 7+30$

بالتالي : $19 \leq -y+5x \leq 37$

نؤطر $-4y-16$

لدينا : $-4y-16=-4y+(-16)$

لدينا $-7 \leq y \leq -4$ منه : $16 \leq -4y \leq 28$

منه: $16+(-16) \leq -4y+(-16) \leq 28+(-16)$

بالتالي : $0 \leq -4y-16 \leq 12$

نؤطر $x+y-t+6z+13$

لدينا :

$x+y-t+6z+13=x+y+(-t)+6z+13$

لدينا : $3 \leq x \leq 6$

و : $-7 \leq y \leq -4$

و لدينا: $-10 \leq t \leq 1$ منه : $-1 \leq -t \leq 10$

و لدينا: $2 \leq z \leq 5$ منه : $12 \leq 6z \leq 30$

نجمع المتفاوتات فنجد :

$20 \leq x+y+(-t)+6z+13 \leq 55$

R

تمرين 2 ← انتبه ← تعليق

لنؤطر t^2

لدينا $-10 \le t \le 1$ منه :

$0 \le t \le 1$ أو $-10 \le t \le 0$

$0 \le t \le 1$ أو $0 \le -t \le 10$

منه $0 \le t^2 \le 1$ أو $0 \le (-t)^2 \le 100$

منه $0 \le t^2 \le 1$ أو $0 \le t^2 \le 100$

بالتالي: $0 \le t^2 \le 100$

← صعوبة هذا التأطير تكمن في كون العدد t مؤطر بين عدد سالب و آخر موجب ، مما يعيق استعمال قاعدة تأطير المربع مباشرة أو حتى تأطير $-t$ ، لذلك نستعمل الحالات : فنؤطر t في الحالة الموجبة ثم في الحالة السالبة ثم نستنتج التأطير من النتائج المحصل عليها.

← تذكر أننا نؤطر مستعملين قواعد التأطير و ليس بتطبيق تعبير المجهول على الأعداد.

لنؤطر $\frac{x-t}{y+10z}$

لدينا : $\frac{x-t}{y+10z} = (x+(-t))\times\frac{1}{y+10z}$

لدينا : $-10 \le t \le 1$ منه : $-1 \le -t \le 10$

و لدينا : $3 \le x \le 6$

إذن : $2 \le x+(-t) \le 16$

لدينا : $2 \le z \le 5$ منه: $20 \le 10z \le 50$

و لدينا : $-7 \le y \le -4$

إذن : $13 \le y+10z \le 46$

إذن : $\frac{1}{46} \le \frac{1}{y+10z} \le \frac{1}{13}$

منه :

$2\times\frac{1}{46} \le (x+(-t))\times\frac{1}{y+10z} \le 16\times\frac{1}{13}$

بالتالي : $\frac{1}{23} \le \frac{x-t}{y+10z} \le \frac{16}{13}$

← لاحظ أن التعابير الأخيرة مركبة لذلك فتأطيرها يتطلب كتابتها على شكل جذاءات و مجاميع قصد التمكن من تطبيق قواعد الترتيب.

لنؤطر xz

لدينا : $3 \le x \le 6$ و $2 \le z \le 5$

منه : $6 \le xz \le 30$

لنؤطر xy

لدينا : $-9 \le k \le -2$ و $-7 \le y \le -4$

منه : $2 \le -k \le 9$ و $4 \le -y \le 7$

منه : $4\times 2 \le (-y)\times(-k) \le 7\times 9$

بالتالي : $8 \le yk \le 63$

← لاحظ أننا استعملنا نفس تقنية تأطير xy ، لكننا استفدنا من كون : $(-x)\times(-y) = xy$

لنؤطر $\frac{z}{x}$

لدينا : $\frac{z}{x} = z\times\frac{1}{x}$

لدينا : $3 \le x \le 6$ منه : $\frac{1}{6} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{3}$

و لدينا : $2 \le z \le 5$

منه : $2\times\frac{1}{6} \le z\times\frac{1}{x} \le 5\times\frac{1}{3}$

بالتالي : $\frac{2}{6} \le \frac{z}{x} \le \frac{5}{3}$ أو أيضا : $\frac{1}{3} \le \frac{z}{x} \le \frac{5}{3}$

لنؤطر $\frac{y^2+5}{t-10}$

لدينا : $\frac{y^2+5}{t-10} = (y^2+5)\times\frac{1}{t+(-10)}$

لدينا : $-7 \le y \le -4$ منه : $4 \le -y \le 7$

منه : $16 \le (-y)^2 \le 49$ أي: $16 \le y^2 \le 49$

منه : $21 \le y^2+5 \le 54$

لدينا : $-10 \le t \le 1$ منه :

$-20 \le t-10 \le -9$

منه : $9 \le -(t-10) \le 20$

منه : $\frac{1}{20} \le \frac{1}{-(t-10)} \le \frac{1}{9}$

إذن :

$21\times\frac{1}{20} \le (y^2+5)\times\frac{1}{-(t-10)} \le 54\times\frac{1}{9}$

أي : $\frac{21}{20} \le \frac{-(y^2+5)}{t-10} \le 6$

بالتالي : $-6 \le \frac{(y^2+5)}{t-10} \le -\frac{21}{20}$

لنؤطر yk

لدينا : $3 \le x \le 6$ و $-7 \le y \le -4$

منه : $4 \le -y \le 7$

منه : $3\times 4 \le x\times(-y) \le 6\times 7$

منه : $12 \le -xy \le 42$

بالتالي : $-42 \le xy \le -12$

← بما أن قاعدة تأطير جذاء تستوجب أن تكون كل الأعداد موجبة ، فإننا اعتمدنا التقنية التالية : أطرنا $-y$ فتصبح أطراف المتفاوتة $4 \le -y \le 7$ كلها موجبة (حتى $-y$ لأن y سالب)، مما سمح لنا بتأطير الجذاء $-xy$ ، و باستعمال قاعدة تأطير المقابل نستطيع تأطير xy.

لنؤطر $\frac{y}{z}$

لدينا : $\frac{y}{z} = y\times\frac{1}{z}$

لدينا : $-7 \le y \le -4$ منه : $4 \le -y \le 7$

و لدينا: $2 \le z \le 5$

منه : $\frac{1}{5} \le \frac{1}{z} \le \frac{1}{2}$

منه : $4\times\frac{1}{5} \le (-y)\times\frac{1}{z} \le 7\times\frac{1}{2}$

أي : $\frac{4}{5} \le \frac{-y}{z} \le \frac{7}{2}$

بالتالي : $\frac{-7}{2} \le \frac{y}{z} \le \frac{-4}{5}$

تمرين 3

انتبه ← تعليق ←

نقارن $3\sqrt{5}$ و $\sqrt{37}$

لدينا : $(\sqrt{37})^2=37$ و $(3\sqrt{5})^2=9\times 5=45$

بما أن : $45>37$

فإن : $3\sqrt{5}>\sqrt{37}$

نقارن $-\sqrt{3}$ و $-2\sqrt{10}$

لدينا : $(\sqrt{3})^2=3$

و $(2\sqrt{10})^2=4\times 10=40$

بما أن : $40>3$

فإن : $2\sqrt{10}>\sqrt{3}$

بالتالي : $-2\sqrt{10}<-\sqrt{3}$

تعليق ← لاحظ أن العددان سالبان لذلك قارنا مقابليهما قبل مقارنتهما.

نقارن $\sqrt{5}$ و $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

لدينا : $(\sqrt{5})^2=5$

و $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2$

$=2+2\sqrt{6}+3=5+2\sqrt{6}$

بما أن : $5+2\sqrt{6}>5$

فإن : $\sqrt{2}+\sqrt{3}>\sqrt{5}$

نقارن $\sqrt{5}-\sqrt{40}$ و $\sqrt{17}-\sqrt{11}$

لدينا $\sqrt{5}<\sqrt{40}$ منه $\sqrt{5}-\sqrt{40}<0$

لدينا $\sqrt{17}>\sqrt{11}$ منه $\sqrt{17}-\sqrt{11}>0$

بالتالي : $\sqrt{5}-\sqrt{40}<\sqrt{17}-\sqrt{11}$

نقارن $6+\sqrt{3}$ و $6+\sqrt{5}$

لدينا $\sqrt{5}>\sqrt{3}$ منه : $6+\sqrt{5}>6+\sqrt{3}$

نقارن $3+\sqrt{3}$ و $\sqrt{27}+1$

لدينا : $(3+\sqrt{3})^2=3^2+2\times 3\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2$

$=9+6\sqrt{3}+3=12+6\sqrt{3}$

و $(\sqrt{27}+1)^2=(\sqrt{27})^2+2\times\sqrt{27}\times 1+1^2$

$=27+2\sqrt{9\times 3}+1=28+6\sqrt{3}$

بما أن : $12+6\sqrt{3}<28+6\sqrt{3}$

فإن : $3+\sqrt{3}<\sqrt{27}+1$

نقارن $-7\sqrt{14}$ و $20\sqrt{2}$

لدينا : $-7\sqrt{14}<0$ و $20\sqrt{2}>0$

منه : $20\sqrt{2}>-7\sqrt{14}$

تعليق ← العدد الموجب أكبر من العدد السالب، لذلك لا نقارن المربعات

تعليق ← لم نقارن المربعين و اكتفينا بمقارنة $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ لوجود العدد 6 في كلتا العددين.

تمرين 4

انتبه ← تعليق ←

معطيات : $1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$ و $2{,}23<\sqrt{5}<2{,}24$

① نؤطر $A=5\sqrt{2}+3\sqrt{5}$

لدينا : $1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$ منه $7{,}05<5\sqrt{2}<7{,}1$

و لدينا : $2{,}23<\sqrt{5}<2{,}24$ منه $4{,}46<2\sqrt{5}<4{,}48$

بالتالي : $11{,}51<5\sqrt{2}+3\sqrt{5}<11{,}58$

أي : $11{,}51<A<11{,}58$

② نؤطر $B=\dfrac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

لنبسط B أولا:

$$B=\frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{(5+\sqrt{5})\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}+5}{5}=\frac{5(\sqrt{5}+1)}{5}=\sqrt{5}+1$$

لدينا: $2{,}23<\sqrt{5}<2{,}24$ منه : $3{,}23<\sqrt{5}+1<3{,}24$

بالتالي : $3{,}23<B<3{,}24$